

Минобрнауки России

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

Кургалин Сергей Дмитриевич

Кафедра цифровых технологий

25.06.21



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.11 Теория функций комплексного переменного

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

09.03.02 Информационные системы и технологии

2. Профиль подготовки/специализация:

Информационные системы и сетевые технологии, Информационные системы в телекоммуникациях, Программная инженерия в информационных системах, Информационные системы и технологии в управлении предприятием, Обработка информации и машинное обучение

3. Квалификация (степень) выпускника:

Бакалавриат

4. Форма обучения:

Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

Кафедра цифровых технологий

6. Составители программы:

Сирота Екатерина Александровна, к. ф.-м. н., доцент

7. Рекомендована: протокол НМС №5 от 10.03.2021

8. Учебный год:

2021-2022 и 2022-2023

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является изучение основ теории функций комплексного переменного.

Основными задачами курса являются:

- знакомство с комплексными числами и основными операциями над ними;
- освоение понятия функции комплексной переменной, а также понятия односвязной (многосвязной) области, внутренней (внешней, удаленной) точки;
- освоение операций дифференцирования и интегрирования функции комплексного переменного;
- знакомство с понятием вычетов.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) входит в цикл профессиональных дисциплин в обязательной части блока Б1. Для успешного изучения данного курса необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения школьного курса математики.

ТФКП относится к числу фундаментальных разделов современной математики. Знание основ ТФКП является важной составляющей общей математической культуры выпускника.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код и название компетенции	Код и название индикатора компетенции	Знания, умения, навыки
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.1 Знает основы математики, физики, вычислительной техники и программирования	Знать: классические и современные методы теории функций комплексного переменного.
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;	ОПК-1.2 Умеет решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования	Уметь: применять аппарат ТФКП для работы с комплексными числами и операциями над ними, а также дифференцировать и интегрировать функции комплексного переменного. Владеть: практическими навыками применения классических и современных методов ТФКП.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час:

8/288

Форма промежуточной аттестации:

Экзамен

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Семестр 2	Семестр 3	Всего
Аудиторные занятия	64	50	114
Лекционные занятия	32	34	66
Практические занятия	32	16	48
Лабораторные занятия			0
Самостоятельная работа	44	58	102
Курсовая работа			0
Промежуточная аттестация	36	36	72
Часы на контроль	36	36	72
Всего	144	144	288

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1	Комплексные числа и действия над ними	Основные определения и факты, относящиеся к понятию комплексных чисел; арифметические действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, их геометрическая интерпретация. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Понятия последовательности комплексных чисел, предела последовательности комплексных чисел, ограниченной, неограниченной, сходящейся последовательности комплексных чисел. Основные теоремы теории пределов. Критерии Коши для сходящейся последовательности. Бесконечно удаленная точка.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4370 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567
2	Функции комплексной переменной	Понятие функции комплексной переменной. Понятия односвязной (многосвязной) области, внутренней (внешней, удаленной) точки. Предел функции комплексной переменной. Непрерывность функции комплексной переменной. Линии на комплексной плоскости.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4370 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567
3	Дифференцирование функций комплексной переменной	Производная функции комплексной переменной. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Условия Коши-Римана дифференцируемости функции. Конформные отображения (первого и второго рода). Аналитические и гармонические функции. Связь между аналитическими и гармоническими функциями. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части. Дифференцирование функций комплексной переменной.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4370 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567
4	Элементарные функции	Явные формулы для функций: $\text{Exp}(z)$, $\text{Sin}(z)$, $\text{Cos}(z)$, $\text{Ln}(z)$. Алгоритм вычисления функций $\text{Arcsin}(z)$, $\text{Arccos}(z)$, $\text{Arctg}(z)$, $\text{Arcctg}(z)$. Отображение плоскости, заданные формулами $f(z)=z^2$, $f(z)=1/z$.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4370 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
5	Интегрирование функций комплексной переменной	<p>Определения и свойства интеграла по комплексной переменной. Понятие первообразной функции, контура, контурного интеграла. Вычисление. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Вывод формулы Коши. Интеграл Коши. Следствия из формулы Коши. Интегралы, зависящие от параметра. Доказательство существования производных всех порядков у аналитических функций. Теорема Лиувилля.</p>	<p>https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10219, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567</p>
6	Ряды аналитических функций	<p>Числовые ряды на комплексной области. Сходимость и абсолютная сходимость числовых рядов с комплексными членами. Сумма ряда, остаток ряда. Ряды функций комплексной переменной. Сходящиеся и равномерно сходящиеся функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Критерий Коши для равномерно сходящихся функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды и их свойства. Теорема Абеля. Радиус сходимости и его вычисление. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора. Единственность определения аналитической функции. Нули аналитической функции. Понятие ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Теоремы о предельных значениях аналитических функций в устранимой особой точке и в полюсе m-го порядка. Теорема Сохатского –Вейерштрасса. Нули аналитической функции. Теорема единственности. Разложение функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки.</p>	<p>https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10219, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567</p>
7	Конформные отображения. Дробно-линейная функция	<p>Понятие конформного отображения. Простейшие примеры конформного отображения. Основные принципы конформного отображения. Свойства дробно-линейного отображения: конформность, круговое свойство, свойство симметрии. Представления дробно-линейной функции как совокупности простейших отображений. Условия однозначно определяющие дробно-линейную функцию.</p>	<p>https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10219, https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567</p>

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
8	Вычеты и их применение	Классификация особых точек однозначной функции. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычеты и их приложения. Вычисление вычетов. Основная теорема о вычетах. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов. Понятие логарифмического вычета. Подсчет нулей аналитической функции.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10219 , https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4567

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела)	Лекционные занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	Самостоятельная работа	Всего
1	Комплексные числа и действия над ними	6	6		12	24
2	Функции комплексной переменной	6	6		12	24
3	Дифференцирование функций комплексной переменной	6	6		12	24
4	Элементарные функции	4	4		12	20
5	Интегрирование функций комплексной переменной	12	8		12	32
6	Ряды аналитических функций	14	10		12	36
7	Конформные отображения. Дробно-линейная функция	12	4		20	36
8	Вычеты и их применение	6	4		10	20
		66	48	0	102	216

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой

под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из выполнения практических и лабораторных заданий в объёме, предусмотренном учебным планом.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов практических (лабораторных) занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Большее количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к online занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

№ п/п	Источник
1	Будаев, В. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс] / Будаев В. Д., Якубсон М. Я. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2017 .— 456 с.— <URL: https://e.lanbook.com/book/96244 >
2	Крупин, В. Г. Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов - М. : Издательский дом МЭИ, 2017.— 332 с.—<URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012376.html >

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Волковьский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учебное пособие для студ. вузов / Л. И. Волковьский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматлит, 2004 .— 312 с.
2	Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие / под ред. И. М. Петрушко .— Москва : Лань, 2010 .— 368 с.
3	Лунц, Г. Л. Функции комплексного переменного: учебник для вузов / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. - М. : Наука, 2002. - 296 с.

№ п/п	Источник
4	Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник для студ. физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 6-е, стер. — М. : Физматлит, 2004.— 335 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1	Электронная библиотека ВГУ https://lib.vsu.ru
2	Электронный университет ВГУ https://edu.vsu.ru
3	ЭБС «Лань» https://e.lanbook.com/
4	«Университетская библиотека online» https://biblioclub.ru/
5	«Консультант студента» http://www.studmedlib.ru/
6	«РУКОНТ» (ИТС Контекстум) https://lib.rucont.ru/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Будаев, В. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс] / Будаев В. Д., Якубсон М. Я. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2017 .— 456 с.— <URL: https://e.lanbook.com/book/96244 >
2	Волковыский, Л. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учебное пособие для студ. вузов / Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматлит, 2004 .— 312 с.
3	Крупин, В. Г. Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов - М. : Издательский дом МЭИ, 2017.— 332 с.—<URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012376.html >
4	Свешников, А. Г. Теория функций комплексной переменной : учебник для студ. физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 6-е, стер. — М. : Физматлит, 2004.— 335 с.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при

необходимости):

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Лекционная аудитория, оснащенная мультимедийным проектором; специализированная мебель: доска меловая или маркерная 1 шт., столы, стулья в необходимом количестве. ОС Windows v.7, 8, 10, набор утилит (архиваторы, файл-менеджеры), LibreOffice v.5-7, Foxit PDF Reader

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Разделы дисциплины (модули)	Код компетенции	Код индикатора	Оценочные средства для текущей аттестации
1	Разделы 1-8	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольная работа
2	Разделы 1-8	ОПК-1	ОПК-1.2	Контрольная работа

Промежуточная аттестация

Форма контроля - Экзамен

Оценочные средства для промежуточной аттестации

Комплект КИМ

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущий контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

контрольная работа.

Примеры заданий для контрольных работ:

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Задание 1. (10 баллов) Вычислите $(1+i)^4$.

Задание 2. (20 баллов) Представьте число $3-i$ в тригонометрической и экспоненциальной форме.

Задание 3. (20 баллов) Вычислите $(3+5i)^{-1/3}$.

Описание технологии проведения: обучающемуся случайным образом дается один из вариантов контрольной работы. На выполнение заданий предоставляется 2 академических часа.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания): максимальная оценка за выполнение каждого задания приведена выше. Оценка снижается, если в процессе выполнения задания были допущены ошибки и неточности. Оценка 0 баллов ставится либо за полностью невыполненное задание, либо при наличии грубых ошибок.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных

средств:

комплект КИМ.

Перечень вопросов к экзамену:

Основные определения и факты, относящиеся к понятию комплексных чисел; арифметические действия над ними. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, их геометрическая интерпретация. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Понятия последовательности комплексных чисел, предела последовательности комплексных чисел, ограниченной, неограниченной, сходящейся последовательности комплексных чисел. Основные теоремы теории пределов. Критерии Коши для сходящейся последовательности. Бесконечно удаленная точка. Понятие функции комплексной переменной. Понятия односвязной (многосвязной) области, внутренней (внешней, удаленной) точки. Предел функции комплексной переменной. Линии на комплексной плоскости. Производная функции комплексной переменной. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Условия Коши-Римана дифференцируемой функции. Конформное отображение (первого второго рода). Аналитические и гармонические функции. Связь между аналитическими и гармоническими функциями. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части. Дифференцирование функций комплексной переменной. Явные формулы для функций: $\text{Exp}(z)$, $\text{Sin}(z)$, $\text{Cos}(z)$, $\text{Ln}(z)$. Алгоритм вычисления функций $\text{Arcsin}(z)$, $\text{Arccos}(z)$, $\text{Arctg}(z)$, $\text{Arcctg}(z)$. Отображение плоскости, заданные формулами $f(z)=z^2$, $f(z)=1/z$. Определения и свойства интеграла по комплексной переменной. Понятие первообразной функции, контура, контурного интеграла. Вычисление. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Вывод формулы Коши. Интеграл Коши. Следствия из формулы Коши. Интегралы, зависящие от параметра. Доказательство существования производных всех порядков у аналитических функций. Теорема Лиувилля.

Числовые ряды на комплексной области. Сходимость и абсолютная сходимость числовых рядов с комплексными членами. Сумма ряда, остаток ряда. Ряды функций комплексной переменной. Сходящиеся и равномерно сходящиеся функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Критерий Коши для равномерно сходящихся функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды и их свойства. Теорема Абеля. Радиус сходимости и его вычисление. Дифференцирование интеграла по параметру. Степенный ряд в разложении аналитической функции в ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора. Единственность определения аналитической функции. Нули аналитической функции. Понятие ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Теоремы о предельных значениях аналитических функций в устранимой особой точке и в полюсе m -го порядка. Теорема Сохатского-Вейерштрасса. Нули аналитической функции. Теорема единственности. Разложение функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки.

Понятие конформного отображения. Простейшие примеры конформного отображения. Основные принципы конформного отображения. Свойства дробно-линейного отображения: конформность, круговое соответствие, сохранение метрических предельных соотношений. Классификация простейших отображений. Условия однозначно определяющие дробно-линейную функцию. Классификация особых точек однозначной функции. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Вычеты и их приложения. Вычисление вычетов. Основная теорема о вычетах. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов. Понятие логарифмического вычета. Подсчет нулей аналитической функции.

Примеры типовых контрольно-измерительных материалов:

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
2. Следствия из формулы Коши.

Контрольно-измерительный материал № 2

1. Предел функции комплексной переменной.
2. Область сходимости ряда Лорана.

Описание технологии проведения. Обучающемуся случайным образом дается КИМ, содержащий 2 вопроса из перечня. На выполнение заданий предоставляется 2 академических часа.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания). Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:

- 1) знание основных понятий теории функций комплексного переменного и ее методов, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач;
- 2) знание постановки классических задач;
- 3) знание методов формулировки и доказательства математических утверждений;
- 4) умение применять методы теории функций комплексного переменного для решения задач профессиональной деятельности;
- 5) умение применять аппарат теории функций комплексного переменного для доказательства утверждений и теорем;
- 6) владение навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов для решения практических задач;
- 7) владение навыками использования методов решения классических задач теории функций комплексного переменного для решения различных естественнонаучных задач.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала:

«отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы. Сданы все контрольные работы (оценка не менее 25 баллов).	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений. Сданы все контрольные работы (оценка не менее 25 баллов).	Базовый уровень	Хорошо

<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении. Сданы все контрольные работы (оценка не менее 25 баллов).</p>	<p>Пороговый уровень</p>	<p>Удовлетворительно</p>
<p>Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе, или не сдана хотя бы одна контрольная работа (получена оценка меньше 25 баллов).</p>	<p>–</p>	<p>Неудовлетворительно</p>